Ένατο διαγώνισμα στις Διαφορικές Εξισώσεις

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 90 Λεπτά

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Θέμα 1

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$(E) \quad L(y)(x) = y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}$$

η οποία έχει μερική λύση την $y_1(x) = e^{-x^2/2}, \ x \geq 0$.

(i) Να επιλυθεί η εν λόγω διαφορική εξίσωση και να βρεθεί μία λύση y_0 αυτής με $y_0(0) = 0$ και $y_0'(0) = 1$.

(ii) Να χαρακτηρίσετε με πλήρη αιτιολόγηση τους παρακάτω ισχυρισμούς ως αληθείς ή ψευδείς.

(a) Υπάρχουν μη φραγμένες λύσεις της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης.

(b) Η συνάρτηση $y_p(x) = \dfrac{x}{2}$ είναι μία λύση της μη ομογενούς $L(y) = x, \ x \in \mathbb{R}$.

(c) Κάθε λύση της μη ομογενούς $L(y) = x$ είναι ασυμπτωτική προς κάποια ευθεία στο $+\infty$.

Θέμα 2

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y'' + 2py' + qy = 0, \ x \in I,$$

όπου I ένα διάστημα στον $\mathbb{R}$ και $p, q : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και έστω $x_0 \in I$.

(i) Με την αντικατάσταση $y = ue^{a\int_{x_0}^{x} p(s)ds}$, όπου a κατάλληλη σταθερά, να αποδείξετε ότι η εξίσωση (E) ανάγεται στην εξίσωση:

$$(*) \quad u'' + Qu = 0, \ x \in I,$$

όπου Q μια κατάλληλη συνάρτηση ορισμένη στη I.

(ii) Αν $\{u_1, u_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων για την ανηγμένη εξίσωση $(*)$, να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{u_1 e^{a\int_{x_0}^{x} p(s)ds}, u_2 e^{a\int_{x_0}^{x} p(s)ds}\}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων της διαφορικής εξίσωσης (E).

(ii) Αν $q := p' + p^2 + \lambda^2$ να επιλύσετε την εξίσωση (E). Εφαρμογή: Για $p(x) = x, \ x \geq 0$ και $q(x) = x^2 + 5, \ x \geq 0$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ